Soluzioni deboli in domini limitati

1. Esistenza di soluzioni deboli in domini limitati

Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$ una funzione data. Consideriamo il funzionale

$$J_f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definito come

$$J_f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega uf\,dx.$$

Esercizio 1. *Mostrare che esiste una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ che minimizza J_f in $H_0^1(\Omega)$.*

Esercizio 2. *Data una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ che minimizza J_f in $H_0^1(\Omega)$, scrivere esplicitamente la funzione*

$$t \mapsto J_f(tu).$$

Dedurre che

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \int_\Omega uf\,dx.$$

Esercizio 3. *Mostrare che il funzionale J_f è convesso:*

$$J_f(tu+(1-t)v) \le tJ_f(u) + (1-t)J_f(v) \quad \textit{per ogni} \quad u, v \in H_0^1(\Omega) \quad \textit{ed ogni} \quad t \in [0,1].$$

Inoltre, quando $t = \frac{1}{2}$ si ha uguaglianza se e solo se $u = v$. Dedurre che la funzione f che minimizza J_f in $H_0^1(\Omega)$ è unica.

Esercizio 4. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto limitato, $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Allora sono equivalenti:*

(1) u è l'unico minimo del funzionale J_f in $H_0^1(\Omega)$;

(2) $-\Delta u = f$ in Ω in senso delle distribuzioni, ovvero

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx = 0 \quad \textit{per ogni} \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

(3) $-\Delta u = f$ in Ω come funzionali nel duale di $H_0^1(\Omega)$, ovvero

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega vf\,dx \quad \textit{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Definizione 5. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$. Diremo che u è soluzione debole del problema*

$$-\Delta u = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega vf\,dx \quad \textit{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Abbiamo di fatto già dimostrato il teorema seguente:

Teorema 6. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole u del problema*

$$-\Delta u = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

Inoltre, u è anche l'unico minimo in $H_0^1(\Omega)$ del funzionale

$$J_f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega uf\,dx.$$

Esercizio 7. *Mostrare che se $f \in L^2(\Omega)$ ed u è la soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

allora

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \int_\Omega uf\,dx.$$

(usare come funzione test la funzione $v = u$). Dedurre che

$$J_f(u) = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega uf\,dx.$$

2. Una soluzione particolare

Lemma 8. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e sia D un aperto $D \Subset \Omega$. Se $u \in H^1(\Omega)$ è una funzione tale che*

$$u = 0 \quad \textit{in} \quad \Omega \setminus D,$$

allora

$$u \in H^1_0(\Omega).$$

Proposizione 9. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e u una funzione*

$$u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Se $u = 0$ su $\partial\Omega$, allora $u \in H^1_0(\Omega)$.

Esercizio 10. *Sia $R > 0$ e sia B_R la palla di raggio R in $\mathbb{R}^d$. Mostrare che la funzione*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2d} \quad \textit{per ogni} \quad x \in B_R \;; \qquad u(x) = 0 \quad \textit{per} \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus B_R.$$

è in $H^1_0(B_R)$.

Esercizio 11. *Sia $R > 0$ e sia B_R la palla di raggio R in $\mathbb{R}^d$. Mostrare che la funzione*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2d} \quad \textit{per ogni} \quad x \in B_R$$

è l'unica soluzione del problema

$$-\Delta u = 1 \quad \textit{in} \quad B_R, \qquad u \in H^1_0(B_R).$$

3. Convergenza delle soluzioni

Esercizio 12. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Sia f_n e $f_n \in L^2(\Omega)$ che converge debole-L^2 ad una funzione f. Sia u_n la successione di soluzioni di*

$$-\Delta u_n = f_n \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u_n \in H^1_0(\Omega)$$

e sia u la soluzione debole di Sia u_n la successione di soluzioni di

$$-\Delta u = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

(i) Mostrare che la successione u_n è limitata in $H^1(\Omega)$;
(ii) Mostrare che la successione u_n converge forte in $L^2(\Omega)$ alla funzione u.
(iii) Mostrare che la successione u_n converge forte in $H^1_0(\Omega)$ alla funzione u.